# Задания

1. Длины сторон треугольника $ABC$ образуют арифметическую прогрессию и известно, что $AB \le BC \le AC$. Докажите, что тогда центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной $BC$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны $AB$ и $CD$ поделены точками $K, L$ и $M, N$ на три равные части. Докажите, что $S_{KLMN} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$.

3. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого $a, b, c$ заключены в следующих пределах: $0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$?

4. Даны отрезок и параллельная ему прямая. Пользуясь только односторонней линейкой, разделите отрезок пополам.

5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle CAD = 60°$. Точка $O$ – точка пересечения диагоналей, точка $F$ делит пополам $BO$, точка $K$ – середина $AO$, точка $M$ – середина $CD$. Докажите, что треугольник $FKM$ равносторонний.

6. Теорема Птолемея. Докажите, что во всяком вписанном четырехугольнике произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон.

7. Через точку $S$, лежащую вне окружности с центром $O$, проведены две касательные, касающиеся окружности в точках $A$ и $B$, и секущая, пересекающая окружность в точках $M$ и $N$. Прямые $AB$ и $SO$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что точки $M, N, K, O$ лежат на одной окружности.

8. В окружность радиуса $R$ вписан равносторонний треугольник $ABC$, $M$ – произвольная точка окружности. Найдите сумму квадратов длин отрезков хорд $MA$, $MB$ и $MC$, т. е. величину $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

9. Три окружности с радиусами 1, 2, 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через три точки попарного касания данных окружностей.